

3 原点 O を中心とする単位円周上に、次の (i), (ii) を満たす点列 P_0, P_1, P_2, \dots がある。ただし、 P_0 の座標は $(1, 0)$ とする。

(i) $\angle P_0OP_n$ は n とともに単調に増大し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \angle P_0OP_n = 2\pi$ である。

(ii) 数列 $\{\angle P_{n-1}OP_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) は初項 θ ($\theta > 0$)、公比 r ($r > 0$) の等比数列である。

(1) θ と r との関係式を求めよ。

(2) α は $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$ を満たす定数とする。おうぎ形 $P_{n-1}OP_n$ の面積を S_n とするとき、

$$\alpha = S_1 + S_5 + S_9 + \dots + S_{4n-3} + \dots$$

を満たす r はただ 1 つ存在することを示せ。