

3 平面上の直線  $y = 2x$  を  $L$  とし, 曲線  $y = \frac{1}{2}x^3$  を  $C$  とする.

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  を次のように順に定める.

(i)  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,

(ii)  $a_n$  が定まったとき, 点  $(a_n, 0)$  を通り  $y$  軸に平行な直線と  $L$  との交点を  $P_n$  とし,  
 $P_n$  を通り  $x$  軸に平行な直線と  $C$  との交点  $Q_n$  の  $x$  座標を  $a_{n+1}$  とする.

(1)  $a_{n+1}$  と  $a_n$  との間に成り立つ関係式を求めよ.

(2) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{2^n}$  を求めよ.