2 n を自然数とする．

$$f_n(x) = x^2 - 2\left(n + \frac{1}{n}\right)x + n^2 - 1 + e^{-x}$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) $n + \dfrac{1}{n} - 2 \leqq x \leqq n + \dfrac{1}{n}$ の範囲において，$f_n(x) = 0$ の解がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) $x \geqq n + \dfrac{1}{n}$ の範囲において，$f_n(x) = 0$ の解がただ 1 つ存在することを示せ．

(3) a_n を (1) の解，b_n を (2) の解とする．さらに，2 次方程式

$$x^2 - 2\left(n + \frac{1}{n}\right)x + n^2 - 1 = 0$$

の 2 つの解を p_n，q_n $(p_n \leqq q_n)$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - p_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - q_n) = 0$$

を示せ．

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)$ を求めよ．