

2 D を $0 \leq x < y$ を満たす整数の組 (x, y) のなす集合とする . $x = 0$ である D の要素 $(0, y)$ を「レベル 0 である」という . 次の操作 G を考える .

操作 G : レベル 0 でない D の要素 (x, y) から新たな D の要素 (x', y') を作る . ここで x' は y を x で割った余りであり , y' は x である .

この操作を (x, y) に n 回繰り返してレベル 0 になるとき , (x, y) は「レベル n である」という . 0 以上の n に対して , レベル n の D の要素 (x, y) のうち , y が最小になるものを「レベル n の最小组」という .

- (1) $n = 0, 1, 2$ について , レベル n の最小组をすべて求めよ . それらが操作 G の繰り返して , どのようにレベル 0 になるかを書け .
- (2) 操作 G を 1 回行うことにより (a, b) が得られるような D の要素をすべて求めよ .
- (3) $n \geq 1$ とする . (a, b) をレベル n の最小组とする . (x, y) をレベル n の組とすれば , $a \leq x$ となることを n についての数学的帰納法を用いて示せ .
- (4) (3) により , 各 $n \geq 1$ に対し , レベル n の最小组がただ 1 つ定まることがわかる . この組を (a_n, b_n) と表すとき , $b_{n+1} = a_n + b_n$, $a_{n+1} = b_n$ であることを示せ .