

4 自然数 n に対して

$$a_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$$

とおく。

(1) a_1, a_2 を求め、

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

(2) a_{13} と a_{14} の 1 の位の数をそれぞれ求めよ。

(3) $[(1 + \sqrt{2})^{1000}]$ の 1 の位の数を求めよ。ただし、実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。たとえば $[1 + \sqrt{2}] = 2$ である。