

2  $n$  を自然数とする。

(1) 二項定理を用いて  $(z + z^{-1})^{2n}$  を展開せよ。ただし、 $z$  は 0 でない複素数とする。

(2)  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  とおき、(1) の展開式を用いて、等式

$$(2 \cos \theta)^{2n} = {}_{2n}C_0 \cos(2n\theta) + {}_{2n}C_1 \cos(2(n-1)\theta) + \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots + {}_{2n}C_k \cos(2(n-k)\theta) + \dots \dots \dots + {}_{2n}C_{2n} \cos(-2n\theta)$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $i$  は虚数単位である。

(3) 次の等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2n} d\theta = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}$$