

3 十分な数の赤玉と青玉が手元にあるものとする。  $a$  と  $n$  を自然数とし、はじめに、空の袋に  $a$  個の赤玉を入れておく。以下の試行を繰り返す。袋の中から玉を 1 個取り出し、それが赤玉ならば青玉を 1 個袋に入れ、青玉ならば赤玉を 1 個袋に入れる。さらに、取り出した玉自体も袋に戻し、袋の中の玉をよくかき混ぜる。結果として、1 回の試行ごとに袋の中にある玉は 1 個ずつ増える。この試行を繰り返したとき、 $n$  回目の試行後に袋に入っている赤玉の個数が  $k$  である確率を  $p_n(k)$  で表す。例えば、 $p_1(k)$  の値は  $k$  が  $a$  のとき 1、そのほかの場合は 0 である。また、 $M_n = \sum_{k=0}^{a+n} kp_n(k)$  とする。

(1)  $p_2(k)$  を求めよ。

(2)  $p_{n+1}(k+1) = Bp_n(k) + Cp_n(k+1)$  と表すとき、 $B$  と  $C$  を  $a, k, n$  で表せ。

(3)  $M_1 = a, M_{n+1} = \frac{a+n-1}{a+n}M_n + 1$  を示せ。

(4) (3) の式を満たす数列  $\{M_n\}$  の一般項を求めよ。さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n}$  を求めよ。