

5 $f(x)$ を区間 $[0, \pi]$ で連続な関数とする。関数 $f_1(x), f_2(x), \dots$ を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$

$$f_{n+1}(x) = 2 \cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、自然数 n に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt$$

とおく。

- (1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。
- (2) $c_n = a_n - 1$ とおく。このとき、 $c_{n+2} = -c_n$ が成立することを示し、一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。
- (3) a_n, b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ。