

4 α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とし, $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義されるとき, 次の問に答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して, $0 < a_n < 1$ かつ $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ。
- (2) $b_n = \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくと, すべての自然数 n に対して, $b_{n+1} < b_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。