

5 a を正の定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする。

$$0 < f(x) < 1, \quad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)} dt = ax$$

さらに, $f(0) = \frac{1}{3}$ であるとする。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0, x = 1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。さらに, $\lim_{a \rightarrow +0} S(a)$ を求めよ。