

3 数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) を

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{(n-1)^3(n-2)^3(n-3)^3 \cdots (2-1)^3}{(n^3-1)\{(n-1)^3-1\}\{(n-2)^3-1\} \cdots \{2^3-1\}} \quad (n \geq 2)$$

で定め, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく.

(1) a_n を n と a_{n-1} の式として表せ.

(2) $\frac{S_1}{a_1}, \frac{S_2}{a_2}, \frac{S_3}{a_3}$ を求めよ.

(3) (2) から $\frac{S_n}{a_n}$ が n のどのような式になるかを予想し, その式を証明せよ.