

4  $f(x) = \sqrt{x+2}$  として、数列  $x_1, x_2, x_3, \dots$  を

$$x_1 = 0, \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数  $n$  に対して

$$2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < x_n < x_{n+1} < 2$$

が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数  $n$  に対して

$$x_n < 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数  $n$  に対して  $x_n < 2 - \alpha^n$  を満たす正の定数  $\alpha$  のうち、最大のものを求めよ。