

5 以下の問いに答えよ。

(1) 実数  $\theta$  に対し,

$$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \beta = \cos \theta - i \sin \theta$$

とおく。すべての自然数  $n$  に対して,

$$\alpha^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad \beta^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

が成り立つことを示せ。ただし,  $i$  は虚数単位を表す。

(2)  $\theta = \frac{2\pi}{7}$  とし, (1) で定めた  $\alpha, \beta$  を考える。 $\alpha^7 = 1$  を示せ。また,  $k, l$  は自然数で  $k + l$  が 7 の倍数のとき,  $\alpha^k = \beta^l$  となることを示せ。

(3)  $\theta = \frac{2\pi}{7}$  とし, (1) で定めた  $\alpha, \beta$  を考える。

$$A = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \quad B = \beta + \beta^2 + \beta^4$$

とおいたとき,  $A + B, AB$  の値を求めよ。

(4)  $\theta = \frac{2\pi}{7}$  のとき,  $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$  の値を求めよ。