

5 2次の正方行列  $A$  を  $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  で定める。 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、点  $P_n(x_n, y_n)$  を関係式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし、 $x_0 = 1, y_0 = 0$  とする。

(1)  $A^4$  を求めよ。

(2)  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $E$  は2次の単位行列とする。

(3) 原点  $O$  から  $P_n$  までの距離  $OP_n$  が最大となる  $n$  を求めよ。