

6 n を自然数とし、

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}, \quad J_n = \int_0^1 \log(\sqrt{1+x^n} + 1) dx$$

とおく。ただし、対数は自然対数とする。

(1) 実数 $t \geq 0$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+t}+1}{2}\right) \leq \frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq J_n - \log 2 \leq \frac{1}{4(n+1)}$$

(3) 導関数 $\frac{d}{dx} \log(\sqrt{1+x^n} + 1)$ を求めよ。

(4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - I_n)$ を求めよ。