

6 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を

$$a_n = 2^n \int_1^{\sqrt{e}} x(\log x)^n dx$$

で定める。ただし e は自然対数の底であり、無理数であることが知られている。

- (1) 不等式 $\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{e}{2(n+1)}$ を示せ。
- (2) 各 n に対して $a_n = p_n e + q_n$ となるように有理数 p_n, q_n をとる。 $n \geq 2$ のとき、
 p_n を p_{n-1} で、 q_n を q_{n-1} でそれぞれ表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n p_n}{n!}$ を求めよ。