

4 関数 $f(x)$ は連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち、すべての実数 x に対して $f''(x)$ の値が正であるとする。

(1) 異なる 2 つの実数 x, y に対して、次の関数を考える。

$$p(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty) \quad (t \text{ は実数}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

このとき

$$p'(0) > 0, \quad p'(1) < 0$$

が成り立つことを示せ。

(2) $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して、 $\textcircled{1}$ で与えた関数 $p(t)$ の値が正であることを示せ。

(3) $a < b < c < d$ を満たす実数 a, b, c, d に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$f(d-a) + f(c-b) > f(d-b) + f(c-a)$$