

3  $k, m, n$  は整数とし,  $n \geq 1$  とする。  ${}_m C_k$  を二項係数として,  $S_k(n), T_m(n)$  を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$T_m(n) = {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \cdots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2)$$

- (1)  $T_m(1)$  と  $T_m(2)$  を求めよ。
- (2) 一般の  $n$  に対して  $T_m(n)$  を求めよ。
- (3)  $p$  が 3 以上の素数のとき,  $S_k(p-1)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, p-2$ ) は  $p$  の倍数であることを示せ。