4　正の整数 n に対して $1, 2, \cdots, n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ とする。この $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対し，各添字 $i = 1, 2, \cdots, n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \to a_j = k$ と書くことにする。ここで $a_i = j \to a_j = k \to a_k = l \to \cdots$ のようにたどり，それを続けていく。例えば $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 5, 6, 1, 4, 3, 7)$ のとき，

(i)　$a_1 = 2 \to a_2 = 5 \to a_5 = 4 \to a_4 = 1 \to a_1 = 2$

(ii)　$a_3 = 6 \to a_6 = 3 \to a_3 = 6$

(iii)　$a_7 = 7 \to a_7 = 7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の (i)，(ii)，(iii) は長さがそれぞれ 4，2，1 のサイクルになっている。

(1)　$n = 3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2)　$n = 4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3)　n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ。

(4)　n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ。