6　α を $0 < \alpha < 1$ なる定数とする．

(1)　$0 < x \leqq 1$ なる x に対し，$\dfrac{1}{x}$ の小数部分を $f(x)$ で表わす．正の整数 n を定めるとき，$\dfrac{1}{x+1} < x \leqq 1$ および $0 \leqq f(x) \leqq \alpha$ を同時に満足する x の範囲は，互いに共通部分をもたない n 個の閉区間の和集合である．それらの区間を求めよ．

(2)　(1) で求めた区間を順にならべたものを

$$[a_n,\, b_n], \quad [a_{n-1},\, b_{n-1}], \quad \cdots\cdots, \quad [a_1,\, b_1]$$

$$(\text{ただし } a_n < b_n < a_{n-1} < b_{n-1} < \cdots\cdots < a_1 < b_1)$$

とし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \frac{dx}{1+x}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．