

4 n 個 ($n \geq 4$) の正方形をそれぞれ次のようにならべた図形 A_n, B_n がある。 A_n, B_n のそれぞれにおいて 1 から n までの数をもれなく 1 つずつ各正方形に入れて、次の 2 つの条件を満足するようにする。

- (i) 同一の行 (横の並び) のどの 2 つの数をとっても右の数が左の数より大きい。
- (ii) 同一の列 (縦の並び) の 2 つの数は下の数が上の数より大きい。

このような入れ方が A_n については $f(n)$ 通り、 B_n については $g(n)$ 通りあるとする。

- (1) $n \geq 5$ のとき、 A_n において数 n を入れることができる正方形の選び方は何通りあるか。
- (2) $n \geq 5$ のとき、 $f(n) = f(n-1) + g(n-1)$ が成り立つことを示せ。
- (3) $f(n)$ および $g(n)$ を n を用いて表せ。