

5 4けたの自然数 A の平方根を求めるために次の手順がある .

- (i) 下から 2 けた目と 3 けた目の間に仕切りを入れ , 上 2 けた , 下 2 けたの表す数をそれぞれ a, b とする ($10 \leq a < 100, 0 \leq b < 100$) .
- (ii) α は $a \geq \alpha^2$ であるような最大の整数とする .
- (iii) $c = a - \alpha^2, d = c \times 100 + b$ とする .
- (iv) β は $d \geq (\alpha \times 20 + \beta) \times \beta$ であるような最大の整数とする .
- (v) $B = \alpha \times 10 + \beta, e = d - (\alpha \times 20 + \beta) \times \beta$ とする .

この手順による計算に対し , 次のことを証明せよ .

- (1) $\beta \leq 9$
- (2) $(B + 1)^2 > A \geq B^2$
- (3) A がある自然数の 2 乗であるための必要十分条件は $e = 0$ である .