

5 曲線  $C_n : y = f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) は,  $x > 0$  で  $f_n(x) > 0$ ,  $f_n(0) = 0$ ,  $x < 0$  で  $f_n(x) < 0$  で,  $C_n$  上の動点  $P_n(x, f_n(x))$  における  $C_n$  の法線 ( $P_n$  を通り,  $P_n$  における  $C_n$  の接線に垂直な直線) が  $x$  軸と交わる点を  $Q_n(q_n(x), 0)$  とするとき,  
 $q_n(x) - x = \frac{-n^2x(nx^2 - 1)}{(nx^2 + 1)^3}$  が成り立っている.

(1)  $f_n(x)$  を求めよ.

(2)  $a$  を実数とするととき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$  を求めよ.