

3 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $f(A) = a + d$, $g(A) = bc - ad$ とおく.

(1) $A^2 = f(A)A + g(A)E$ を示せ. ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(2) $n \geq 1$ のとき, $A^{n+1} = p_n A + q_n E$ を満たすような数 p_n, q_n が存在することを示せ.

(3) 2 次の正方行列 A, B が $f(A) = f(B) > 0$ および $g(A) = g(B) \geq 0$ を満たし, さらに $A^n = B^n$ であるような $n \geq 2$ が存在するとき, $A = B$ が成り立つことを示せ.