

5 自然数  $n$  に対して図形  $T_n$  を以下のように順に定義する．まず  $T_1$  は，3つの点を2つの長さ1の線分で図1のように結んで定義する．一般に図形  $T_{n+1}$  は図形  $T_n$  を2つと点を1つ用意し，その点と  $T_n$  の一番上の点を長さ1の線分で結ぶことにより，図2のように定義する．たとえば  $T_3$  は図3のようになる． $T_n$  を通信回路と考える．隣接する2つの点を結ぶ長さ1の通信路が故障しているかどうかは互いに独立であって，その確率はすべて  $p$  であるとする． $T_n$  の一番上の点を  $O$ ，一番下の  $2^n$  個の点の集合を  $A_n$  で表す． $O$  から  $A_n$  のどの点へも通信できない確率を  $p_n$  とする．

- (1)  $p_n$  と  $p_{n+1}$  の関係式を求めよ．
- (2)  $1 - p_{n+1} \leq 2(1 - p)(1 - p_n)$  となることを示せ．
- (3)  $p > \frac{1}{2}$  のとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  を求めよ．