5　n を正の整数，a を正の実数とする．曲線 $y = x^n$ と曲線 $y = a \log x$ が，点 P で共通の接線をもつとする．ただし，対数は自然対数である．点 P の x 座標を t とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a，t をそれぞれ n を用いて表せ．

(2)　曲線 $y = x^n$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とする．また，曲線 $y = a \log x$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする．このとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を n を用いて表せ．

(3)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x} + x - 1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを，次の (a), (b) に分けて示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

(a)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^{-x} + x - 1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ．

(b)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x} + x - 1$ が成り立つことを示せ．

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．