

4  $a, b, c$  を正の定数とし,  $x$  の関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  を考える. 以下, 定数はすべて実数とする.

(1) 定数  $p, q$  に対し, 次をみたす定数  $r$  が存在することを示せ.

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad |px + q| \leq rx$$

(2) 恒等式  $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$  を用いて, 次をみたす定数  $k, l$  が存在することを示せ.

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq \frac{l}{x}$$

(3) すべての自然数  $n$  に対して,  $\sqrt[3]{f(n)}$  が自然数であるとする. このとき関数  $f(x)$  は, 自然数の定数  $m$  を用いて  $f(x) = (x + m)^3$  と表されることを示せ.