

5 正数 r に対して, $a_1 = 0$, $a_2 = r$ とおき, 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める.

$$a_{n+1} = a_n + r_n(a_n - a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし a_n と a_{n-1} から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ, 表がでたとき $r_n = \frac{r}{2}$, 裏がでたとき $r_n = \frac{1}{2r}$ とする. ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする. a_n の期待値を p_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) p_3 および p_4 を, r を用いて表せ.
- (2) $n \geq 3$ のときに p_n を, n と r を用いて表せ.
- (3) 数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ.
- (4) r が (3) で求めた範囲を動くとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ の最小値を求めよ.