

4 5次式 $f(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ (p, q, r, s, t は実数) について考える。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ が等差数列であることと、

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + lx + m$$

(l, m は実数) と書けることは互いに同値であることを示せ。

(2) $f(x)$ は (1) の条件をみたすものとする。 α を実数、 k を 3 以上の自然数とする。 k 項からなる数列

$$f(\alpha), f(\alpha+1), f(\alpha+2), \dots, f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α, k の組をすべて求めよ。