

1 自然数  $n$  に対して関数  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x \geq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1)  $\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$  を示せ．

(2) 数列  $\{I_n\}$  を

$$I_n = \int_0^n f_n(x) dx$$

で定める． $0 \leq x \leq 1$  のとき  $\log(1+x) \leq \log 2$  であることを用いて数列  $\{I_n\}$  が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし， $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  であることは用いてよい．