

3 n を自然数とし, t を $t \geq 1$ をみたす実数とする.

(1) $x \geq t$ のとき, 不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{2tn^2} \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(3) $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - pn) = q$ をみたすような実数 p, q の値を求めよ.