

4 $f(x) = \log(x+1) + 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = x$ は, $x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ．

(2) (1) の解を α とする．実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば, 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$$

(3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める．このとき, すべての自然数 n に対して,

$$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ．

(4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ を示せ．