

6 p, q を 1 より大きな自然数とする．第 1 番目の多項式 $f_1(x)$ を $f_1(x) = x^p$ で定義する．次に第 2 番目，第 3 番目の多項式を，それぞれ

$$f_2(x) = \int_0^x \left(\frac{f_1(t)}{t} + t^{q-1} \right) dt,$$

$$f_3(x) = \int_0^x \left(\frac{f_2(t)}{t} + t^{q-1} \right) dt$$

で定義し，一般に第 n 番目の多項式 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \int_0^x \left(\frac{f_{n-1}(t)}{t} + t^{q-1} \right) dt \quad (n = 2, 3, \dots)$$

で定義する．このとき，次の問 (1)，(2)，(3) に答えよ．

- (1) $f_2(x)$ ， $f_3(x)$ ， $f_4(x)$ を求めよ．
- (2) 一般の自然数 n に対して， $f_n(x)$ を数学的帰納法を用いて定めよ．
- (3) x を実数の定数とみて，数列 $f_1(x)$ ， $f_2(x)$ ， \dots ， $f_n(x)$ ， \dots の極限值を求めよ．