

3 α, β は定数で, $0 < \alpha < \beta < 1$ を満たすとし, $f(x) = x + (x - \alpha)(x - \beta)$ とする.

数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = \alpha\beta$, $x_n = f(x_{n-1})$ ($n \geq 2$) で定める.

(1) $0 < x < \alpha$ のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

(a) $x < f(x) < \alpha$

(b) $\frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < 1 + \alpha - \beta$

(2) すべての自然数 n に対し, $0 < x_n < \alpha$ であることを示せ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha - x_n) = 0$ を示せ.