

4 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$, $n \geq 1$ で定めるとき, 次の問に答えよ.

(1) すべての n に対して $a_n > 1$ および $a_{n+1} < a_n$ が成り立つことを示せ.

(2) a_3 の値を求めよ. また $n \geq 3$ のとき $a_{n+1} - 1 \geq \frac{20}{41}(a_n - 1)^2$ が成り立つことを示せ.

(3) $p_n = 2^{n-3}$ とし, $b_n = \frac{41}{20} \left(\frac{1}{82} \right)^{p_n}$ とおく. $n \geq 3$ のとき, $a_n - 1 \geq b_n$ を示せ.