

3 xy 座標平面で点 P は点 $A(1, 0)$ を始点として、原点 O を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一定の速さで回転する。点 Q は動径 OP 上を原点 O から出発して一定の速さで P に向かって進み、点 P が円を 1 周して点 A に戻ってきた時にちょうど点 P に到達するとする。このときの点 Q の軌跡を C 、 $\angle POA = \theta$ 、そして C と線分 OQ とで囲まれる領域の面積を $S(\theta)$ とする。次の問に答えよ。

(1) Q の座標を θ を用いて表せ。

(2) 上の座標を $Q(\theta)$ とする。点 $Q(\pi)$ における C の接線と y 軸との交点の座標を求めよ。

(3) $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ のとき

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_1}{2\pi} \right)^2 < \frac{S(\theta_2) - S(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} < \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_2}{2\pi} \right)^2$$

を示せ。

(4) $\frac{dS(\theta)}{d\theta}$ および $S(\theta)$ を求めよ。