

2 m を正の定数とし, $x \geq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき,
 $x \geq 0$ において関数 $u(x)$, $v(x)$, $f(x)$, $g(x)$ を

$$u(x) = \int_0^x S(t)dt + m, \quad v(x) = \int_0^x tS(t)dt + m,$$

$$f(x) = \frac{v(x)}{u(x)}, \quad g(x) = v(x) - xu(x)$$

とおく.

- (1) $g(0) > 0$, $g(1) < 0$ および $x > 0$ において $g'(x) < 0$ を示せ.
- (2) $f(x) = x$ を満たす x の値がただ 1 つ存在することを示せ.
- (3) $f(x) = x$ を満たす x の値を a とするとき, $f(x)$ の最小値を求めよ.