

2 正の整数  $a$  に対し,  $a$  の正の約数全体の和を  $f(a)$  で表す. ただし, 1 および  $a$  自身も約数とする. たとえば,  $f(1) = 1$  であり,  $a = 15$  ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので,  $f(15) = 24$  となる. 次の問いに答えよ.

- (1)  $a$  が正の奇数  $b$  と正の整数  $m$  を用いて  $a = 2^m b$  と表されるとする. このとき  $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$  が成り立つことを示せ.
- (2)  $a$  が 2 以上の整数  $p$  と正の整数  $q$  を用いて  $a = pq$  と表されるとする. このとき  $f(a) \geq (p+1)q$  が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのは,  $q = 1$  かつ  $p$  が素数であるときに限ることを示せ.
- (3) 正の偶数  $a, b$  は, ある整数  $m, n$  とある奇数  $r, s$  を用いて  $a = 2^m r, b = 2^n s$  のように表すことができる. このとき  $a, b$  が  $f(a) = 2b, f(b) = 2a$  をみたせば,  $r, s$  は素数であり, かつ  $r = 2^{n+1} - 1, s = 2^{m+1} - 1$  となることを示せ.