

3 次の問いに答えよ .

(1) すべての正の実数 x, y に対して , 不等式 $x \log x - x \log y - x + y \geq 0$ が成り立つことを示せ . ここで \log は自然対数を表す .

(2) a, b は実数で $a < b$ とする . 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数で , $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ をみたす . このとき , 不等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) dx$$

が成り立つことを示せ .

(3) a, b は実数で $a < b$ とする . 閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ とする . 不等式

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq M \log M$$

が成り立つことを示せ .