

1 実数  $a, c$  を係数とする関数  $f(x) = ax^2 + c$  について、次の条件を考える。

(\*)  $0 \leq x \leq 1$  の範囲で  $f(x) \geq (x+1)^2$  が成立する。

(1)  $a \geq 2$  のとき、条件(\*)を満たす最小の  $c$  の値は  $\frac{a}{a-1}$  であることを示せ。

(2)  $a \leq 2$  のとき、条件(\*)を満たす最小の  $c$  の値は  $4-a$  であることを示せ。

(3) 関数  $f(x)$  が条件(\*)を満たしているとき、定積分  $\int_0^1 f(x)dx$  を最小にする  $a, c$  と、そのときの定積分の値を求めよ。