

1  $xy$  平面上で,  $x = r(t) \cos t$ ,  $y = r(t) \sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) で表される曲線を  $C$  とする.

(1)  $r(t) = e^{-t}$  のとき,  $x$  の最小値と  $y$  の最大値を求め,  $C$  の概形を図示せよ.

(2) 一般に, すべての実数  $t$  で微分可能な関数  $r(t)$  に対し,

$$\int_0^\pi \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t dt = \int_0^\pi \{r(t)\}^3 \left( \sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

が成り立つことを示せ. ここで,  $r'(t)$  は  $r(t)$  の導関数である.

(3) (1) で求めた曲線  $C$  と  $x$  軸とで囲まれる図形を,  $x$  軸のまわりに一回転してできる立体の体積  $V$  は  $V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi e^{-3t} \sin t dt$  と表せることを示せ.