

1 xy 平面上で, $x = r(t) \cos t$, $y = r(t) \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) で表される曲線を C とする.

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき, x の最小値と y の最大値を求め, C の概形を図示せよ.

(2) 一般に, すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し,

$$\int_0^\pi \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t dt = \int_0^\pi \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

が成り立つことを示せ. ここで, $r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である.

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を, x 軸のまわりに一回転してできる

立体の体積 V は $V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi e^{-3t} \sin t dt$ と表せることを示せ.