

3 座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし、辺の長さが 1 である正方形 (周は含まない) を単位正方形と呼ぶことにする。 p , n を自然数とし、領域

$$D_n = \{(x, y) | 0 \leq x, x^p \leq y \leq n\}$$

を考え、その面積を S_n とする。 L_n と M_n を、それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

- (1) グラフ $y = x^p$ ($0 \leq x \leq n^{\frac{1}{p}}$) と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。
- (2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また、面積 S_n を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ。