

4 関数  $f(x)$  は区間  $0 \leq x \leq 1$  において連続で  $0 \leq f(x) \leq 1$  をみたす．このとき次の問いに答えよ．

(1)  $y = f(x)$  のグラフと直線  $y = x$  は共有点を持つことを証明せよ．

(2)  $f(x)$  が微分可能で  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$  をみたすならば，

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ とし } x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

によって定義される数列  $\{x_n\}$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき収束することを証明せよ．