

3 関数 $f(x) = x^2 + 2px + q$ を用いて, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = -rf'(a_n) + a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と定める. ただし, p, q, r は実数で, $p \neq 0$ かつ $0 < r < \frac{1}{2}$ とする.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ を求めよ.

(3) m を $f(x)$ の最小値とする. 任意の n について $|f(a_{n+1}) - m| < |f(a_n) - m|$ が成り立つことを示せ.