

3 a, b を正の数とし, 空間内の 3 点 $A(a, -a, b), B(-a, a, b), C(a, a, -b)$ を考える. A, B, C を通る平面を α , 原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 線分 AB の中点を D とするとき, $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB}$ であることを示せ. また $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

(2) ベクトル \overrightarrow{DC} と \overrightarrow{DO} のなす角を θ とするとき $\sin \theta$ を求めよ. また, 平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき, 線分 OH の長さを求めよ.

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき, 四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ. ただし, P は平面 α 上にはないものとする.