

1 自然数 n に対して, $a_n = (\cos 2^n)(\cos 2^{n-1}) \cdots (\cos 2)(\cos 1)$ とおく. ただし, 角の大きさを表すのに弧度法を用いる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $a_1 = \frac{\sin 4}{4 \sin 1}$ を示せ.

(2) $a_n = \frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1} \sin 1}$ を示せ.

(3) $a_n < \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ.