5　$f(x)$ を $x \geqq 0$ で定義された連続な関数とし，a，b を正の定数とする．このとき，$f(x)$ が $x \geqq 0$ で

$$0 \leqq f(x) \leqq a + b\int_0^x f(t)dt$$

の関係を満たすものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　$g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ とするとき，

$$\frac{d}{dx}\{g(x)e^{-bx}\} \leqq ae^{-bx}$$

が成立することを示せ.

(2)　$f(x) \leqq ae^{bx}$ が成立することを示せ.

(3)　$F(x)$ は x について連続な関数で，任意の二つの実数 α，β に対して，次の関係を満たすものとする．

$$|F(\alpha) - F(\beta)| \leqq |\alpha - \beta|$$

さらに，$x \geqq 0$ で定義された二つの連続な関数 $y(x)$ と $z(x)$ は次の関係式を満たすものとする．

$$y(x) = \int_0^x F(y(t))dt, \quad z(x) = \int_0^x F(z(t))dt$$

このとき，$h(x) = |y(x) - z(x)|$ とおけば，

$$h(x) \leqq \int_0^x h(t)dt$$

が成立することを示せ.

(4)　$x \geqq 0$ で $y(x) = z(x)$ であることを証明せよ.