

1 行列  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  について以下の問いに答えよ。

(1)  $a, b, c, d$  を実数とする。行列  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が  $AT = TB$  かつ  $ad - bc = 1$  を満たすとき,  $b, c, d$  をそれぞれ  $a$  を用いて表せ。

(2)  $xy$  平面内の点  $P_n(\alpha_n, \beta_n)$  を

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

で定める。ただし,  $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$  とする。このとき  $\alpha_n$  および  $\beta_n$  を求めよ。また, 点  $P_n$  を通り,  $y = x$  で与えられる直線  $l$  と直交する直線  $m$  の方程式を求めよ。

(3) 直線  $l$  と直線  $m$  の交点を  $Q_n$  とし,  $P_n$  と  $Q_n$  の距離を  $d_n$  とする。このとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$  を求めよ。