

3 平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し,

$$L = PA^2 + PB^2 + PC^2$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ および $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ とおくとき, 次の等式を示せ。

$$L = 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

(2) L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また, L の最小値は

$$\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

であることを示せ。