

2 自然数 n に対して定まる関数

$$f_n(x) = 1 - \sqrt{5} |\sin(2n\pi x)|$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) 任意の実数 x に対して $f_n(x) = f_n\left(x + \frac{k}{2n}\right)$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) が成り立つことを示せ。
- (2) 区間 $\left(\frac{k-1}{2n}, \frac{k}{2n}\right)$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) において $f_n(x) = 0$ は相異なる 2 つの解を持つことを示せ。
- (3) 区間 $[0, 1]$ における方程式 $f_n(x) = 0$ のすべての解の和を S_n とおくと、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ を求めよ。